19/12/2017

→ Ανισότητες Markov Chebyshev

Πρόταση:

α) (Ανισότητα Markov): Αν X είναι μια τ.μ. μη αρνητική και μέση τιμή $E(X)$. Τότε $\forall$ σταθερά $\alpha>0$:

$$P(X\geq \alpha) \leq \frac{E(X)}{\alpha} \quad \text{ή} \quad P(X<\alpha) \geq 1-\frac{E(X)}{\alpha}$$

β) (Ανισότητα Chebyshev): Έστω τ.μ. X με μέση τιμή $E(X)$ και διακύμανση $\sigma^2 = Var(X)$. Τότε $\forall$ σταθερά $\alpha>0$:

$$P(|X-\mu|\geq \alpha) \leq \frac{Var(X)}{\alpha} \quad \text{ή} \quad P(|X-\mu|<\alpha) \geq 1-\frac{Var(X)}{\alpha^2}$$

απόδειξη

α) Έστω τ.μ. $Y \overset{ορσ}{=} \begin{cases} \alpha, & \text{όταν } X\geq\alpha \\ 0, & \text{όταν } X<\alpha \end{cases}$

Από τον ορισμό $X\geq Y \xrightarrow[\text{μέσης τιμής}]{\text{ιδιότητα}} E(X)\geq E(Y)$ (1)

$$E(Y) = \alpha\, P_Y(\alpha) + 0\cdot P_Y(0) = \alpha\cdot P(X\geq\alpha) \quad (2)$$

Από (1) και (2): $E(X)\geq E(Y) = \alpha P(X\geq\alpha) \Rightarrow P(X\geq\alpha)\leq \frac{E(X)}{\alpha}$

$P(X<\alpha) = 1-P(X\geq\alpha)$

β) $P(|X-\mu|\geq\alpha) = P((X-\mu)^2\geq\alpha^2) \overset{\text{Αν. Markov}}{\leq} \frac{E(X-\mu)^2}{\alpha^2} = \frac{Var(X)}{\alpha^2}$

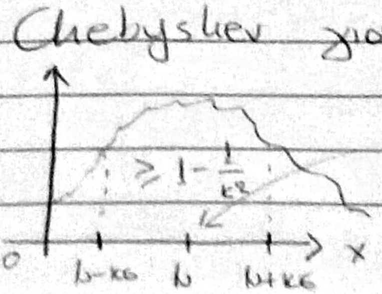
Παρατηρήσεις:

(1) $P(|X|\geq\alpha)\leq \frac{E(X)}{\alpha}$, $\alpha>0$

(2) Αν $X\geq 0$, τότε $P(X^k\geq\alpha)\leq \frac{\mu_\nu}{\alpha}$

(3) $P(|X-\mu|\geq k\sigma)\leq \frac{1}{k^2}$ ή $P(|X-\mu|<k\sigma)\geq 1-\frac{1}{k^2}$

Chebyshev για $\alpha = k\sigma$



(4) $P(X\geq a) \leq \inf\{ e^{-at} m_X(t),\ t\geq 0\}$

$m_X(t) \overset{\text{ορ.}}{=} E(e^{tX})$

$P(X\geq a) \overset{t\geq 0}{=} P(tX\geq a) = P(e^{tX}\geq e^{at}) \leq \dfrac{E(e^{tX})}{e^{ta}}$

$P(X\geq a) \leq e^{-ta} m_X(t) \quad \forall t\geq 0$

Παράδειγμα:

Έστω τ.μ. $X\sim B(n=16, p=0,5)$. Να υπολογιστεί $P(4<X<12)$

Να βρεθεί κάτω φράγμα για την πιθανότητα αυτή.

Λύση:

$P(4<X<12) = \sum_{4<x<12} P_X(x) = \sum_{x=5} \binom{16}{x} 0,5^x \cdot (1-0,5)^{16-x} = 0,9234$

Η Markov απαιτεί να ξέρω μόνο τη μέση, η Chebyshev θέλει τη μέση και την διακύμανση.

$E(X) = n\cdot p = 16\cdot 0,5 = 8$

$Var(X) = np(1-p) = 4 \Rightarrow \sigma = +\sqrt{VarX} = 2$

$P(4<X<12) = P(4-8 < X-8 < 12-8) = P(-4<X-8<4) = P(|X-8|<4)$

$P(|X-\mu| < \underset{k}{2}\cdot\underset{\sigma}{2}) \geq 1-\dfrac{1}{2^2} = 1-\dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$

Παράδειγμα:

Ο μέσος όρος σε λεπτά (min) που οδηγός διανύει πίστα σε 3min με ~~ταχύτητα~~ τυπ. 1/2 min. Είναι ρεαλιστικό να πιστεύει ότι με μία προσπάθεια θα διανύσει την πίστα μεταξύ 1 και 5 min?

Λύση

X χρόνος να διανύσει την πίστα

X χρόνος $\to E(X)=3$

$\to \sigma = 1/2$

$P(1\leq X\leq 5) = P(1-3\leq X-3\leq 5-3) = P(-2\leq X-3\leq 2) =$

$P(|X-\mu|\leq 2) \geq 1-\dfrac{1}{k^2} = 1-\dfrac{1}{16} = \dfrac{15}{16} = 0,9375$

$k=4$

Θα μπει ερώτηση από εδώ

Αλλαγή Μεταβλητών

Πρόβλημα: Έστω τ.μ. X με γνωστή κατανομή. Ποια η κατανομή της τ.μ. $Y=g(X)$?

(I) Διακριτή Περίπτωση

(II) Μέθοδος συνάρτησης πιθανότητας (σ.π.)

Έστω διακριτή τ.μ. X με τιμές $x_1, x_2, \ldots$ και γνωστή σπ. $P_X(x)$

Ζητώ σ.π. $Y=g(X)$ με g γνωστή πραγματική συνάρτηση.

$$P_Y(y) \overset{\text{ορ}}{=} P(Y=y) = P(g(X)=y) = \sum_{\{x:\, g(x)=y\}} P_X(x)$$

Παράδειγμα

Έστω τ.μ. X με τιμές $x=0,1,2$ και σπ $P_X(x)=\frac{1}{3}$, $x=0,1,2$

Κατανομή $Y=2X+1$?

Τιμές τ.μ. Y: $y=1,3,5 \leftarrow$ διακριτή

Ζητώ P_Y ?

$P_Y(1) = P(Y=1) = P(2X+1=1) = P(X=0) = P_X(0) = 1/3$

$P_Y(3) = P(Y=3) = P(2X+1=3) = P(X=1) = P_X(1) = 1/3$

$P_Y(5) = P(Y=5) = P(2X+1=5) = P(X=2) = P_X(2) = 1/3$

$$P_Y(y) = \begin{cases} 1/3, & y=1,3,5 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Παράδειγμα:

Έστω τ.μ. X των $x=0,\pm1,\pm2,\pm3$ και σ.π. $P_X(x)=1/7$, $x=0,\pm1,\pm2,\pm3$

Κατανομή της τ.μ. $Y=X^2$

Τιμές της τ.μ. Y: $y=x^2=0,1,4,9$

$P_Y(0) = P(Y=0) = P(X^2=0) = P(X=0) = P_X(0) = 1/7$

$P_Y(1) = P(Y=1) = P(X^2=1) = P(X=1 \text{ ή } X=-1) = P(X=1)+P(X=-1) = 2/7$

$P_Y(4) = P(Y=4) = P(X^2=4) = P(X=2 \text{ ή } X=-2) = P(X=2)+P(X=-2) = 2/7$

$P_Y(9) = P(Y=9) = P(X^2=9) = P(X=3 \text{ ή } X=-3) = P(X=3)+P(X=-3) = 2/7$

$$P_Y(y) = \begin{cases} 1/7, & y=0 \\ 2/7, & y=1,4,9 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Έλεγχος: $\sum_{y=0,1,4,9} P_Y(y) = 1$

Παράδειγμα:

Έστω τ.μ. X με σ.π. $p_X(x) = \begin{cases} 1/\nu, & x=0 \\ 1/2\nu, & x=\pm 1, \dots, \pm(\nu-1) \end{cases}$

Κατανομή της τ.μ. $Y=|X|$

Τιμές Y: $y=|x| = 0, 1, 2, (\nu-1)$

$P_Y(0) = P(Y=0) = P(|X|=0) = P(X=0) = p_X(0) = 1/\nu$

$P_Y(1) = P(Y=1) = P(|X|=1) = P(X=1 \text{ ή } X=-1) = p_X(1) + p_X(-1) = 1/2\nu + 1/2\nu = 1/\nu$

$\vdots$

$P_Y(\nu-1) = P(Y=\nu-1) = P(|X|=\nu-1) = P(X=\nu-1 \text{ ή } X=1-\nu) = p_X(\nu-1) + p_X(1-\nu) = 1/\nu$

$p_Y(y) = \begin{cases} 1/\nu, & y=0,1,\dots,(\nu-1) \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$

Αλλαγή Μεταβλητών

Πρόβλημα: Έστω τ.μ. X με γνωστή κατανομή. Ποια η κατανομή της τ.μ. $Y=g(X)$?

(I) Διακριτή Περίπτωση

(II) Μέθοδος της σκ

Έστω συνεχής τ.μ. X με σκ F_X και σππ f_X γνωστή.
Ζητείται η κατανομή της τ.μ. $Y=g(X)$

$$F_Y(y) \overset{\text{ορ}}{=\!=} P(Y \le y) = P(g(X) \le y) = \int_{\{x: g(x)\le y\}} f_X(x)\,dx$$

$$f_Y(y) = \frac{d F_Y(y)}{dy}$$

Παράδειγμα:

Έστω $X \sim \text{Uniform}(0,1)$ με σκ

$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x\le 0 \\ x, & 0<x<1 \\ 1, & x \le 1 \end{cases}$

Να βρεθεί κατανομή της τ.μ. $Y=X^n$, $n\in\mathbb{N}$

Θυμίζω: $f_X(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x \le 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$ η σππ της X

Λύση:

Τιμές Y: $y = x^4, \ \forall x \in (0,1)$

Τιμές της Y: $y \in (0,1)$

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(X^4 \le y) = P(X \le y^{1/4}) \overset{\varphi.}{=} F_X(y^{1/4}) = y^{1/4}, \quad 0<y<1.$$

Πιο αναλυτικά:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \le 0 \\ y^{1/4}, & 0 \le y \le 1 \\ 1, & y \ge 1 \end{cases}$$

Η σππ $f_Y(y) = \dfrac{dF_Y(y)}{dy} = \begin{cases} \frac{1}{4} y^{\frac{1}{4}-1}, & 0<y<1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$

Έλεγχος: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(y)\,dy = 1$